谓词逻辑

也称一阶逻辑，在命题逻辑的基础上引入谓词、量词和个体词

个体词：表示具体对象或对象的符号

如用 a，b，c 表示小明、小红、小张

谓词：用于表示对象性质或对象间关系的符号

一元谓词：P(x)：x具有性质P

如Human(x)：x是人

多元谓词：R(x,y)：x和y有关系R

如Love(x,y)：x爱y

量词：表示数量。全称量词 $\forall$ 与存在量词 $\exists$

联结词：同命题逻辑。$\neg$ $\wedge$ $\vee$ $\longrightarrow$ $\longleftrightarrow$

知识单元：在大型系统中将有关某一事物的各种知识联系在一起组成一个结构，称为知识单元或结构体。可以增加知识检索效率

如：SDU

SHANDOND(SDU)

College(SDU, AI College)

Student(SDU, xxx)

谓词逻辑推理

三段论推理：自然演绎推理的一种，从一组真的事实出发，直接运用经典逻辑中的推理规则推出结论的过程

包括假言推理（P，P→Q ⇒ Q）、拒取式推理（P→Q，~Q ⇒ ~P）、析取三段论、假言三段论等

三段论推理在机器中实现起来有诸多困难，如规则太多、应用规则要很强的模式识别能力，中间结论指数递增等。机器一般用归结演绎推理（一种基于归结原理规则的推理方法）

子句

· 任何文字的析取式称为子句。由r个文字组成的子句叫r-子句

析取式：若干命题用"或"连接而成的式子，更广泛的定义下析取指代所有关系，不局限于"或"

· 不包含任何文字的子句称为空子句，空子句是永假的

· 由子句构成的集合称为子句集，子句集中各子句之间是合取关系

定理1：子句集S是不可满足的，当且仅当其全部子句的合取式是不可满足的

定理2：设有谓词公式F，其标准形的子句集为S，则F不可满足的充要条件是S不可满足

将谓词公式化为子句集

1、化为前束合取范式

前束范式由全称量词与存在量词串组成的前缀和不含量词的母式组成，形如 $(Q_1x_1)(Q_2x_2)\cdots(Q_nx_n)M$ Q_i是量词($\forall, \exists$)

(1) 消去蕴含符号 $(A\Rightarrow B)\Longleftrightarrow(\sim A\vee B)$

(2) 反复用狄摩根定律，减少否定符号的辖域

$\neg A \vee \neg B$ 代替 $\neg(A \wedge B)$

$\neg A \wedge \neg B$ 代替 $\neg(A \vee B)$

A 代替 $\neg(\neg A)$

$(\exists x)(\neg A)$ 代替 $\neg(\forall x)A$

$(\forall x)(\neg A)$ 代替 $\neg(\exists x)A$

(3) 对变量标准化

同一公式里若两个量词用了相同变量，就把其中一个替换为公式中没出现的新变量，且在该量词辖域内全部替换

如：$\forall x\,(P(x) \to (\exists x)Q(x))$

$\Rightarrow \forall x\,(P(x) \to (\exists y)Q(y))$

关联术语：哑元，即被 $\forall$ 或 $\exists$ 约束的变量，只在自己的辖域内有效，变量无实际意义

(4) 由于母式 M 不含量词，可以变换为一个合取范式

如 $M = P(x) \to Q(x, y)$

$= \neg P(x) \vee Q(x, y)$

2、消去存在量词

对于化为前束范式 $(Q_1 x_1) \cdots (Q_n x_n) M$ 的公式来说，设 Q_r $(1 \le r \le n)$ 是量词序列中一个存在量词

① 如果没有全称量词出现在 Q_r 之前，则选 M 中一个未出现过的常量 a，代替 M 中所有的 x_r，并消去 $(Q_r x_r)$

如：$\exists y\, P(y)$ 写成 $P(a)$

② 如果 $Q_{s1} \cdots Q_{sm}$ 是出现在 Q_r 之前的所有全称量词

$(1 \le s_1 < s_2 < \cdots < s_m < r)$，我们就选一个M中没出现过的m元函数符号f，用$f(x_{s_1}, \cdots, x_{s_m})$代替M中所有$x_r$，并消去$(Qr\,x_r)$

如：$\forall y \exists x P(x,y)$ 写成 $\forall y P(f(y), y)$

按上述方法得到的公式叫下的斯柯林标准型
用来代替x_r的a或f称为斯柯林函数

3、省略全称量词

4、将M转换为子句集S

(1) 消去$\land$，即用$\{A, B\}$替代$(A \land B)$

(2) 更换变量名，使每个子句的变量名不同

消解原理

定义：设L是一个文字，则¬L与L为互补文字

设C_1、C_2是命题逻辑中的两个子句，C_1中有文字L_1，C_2中有L_2，L_1与L_2互补。从C_1，C_2中分别删去L_1 L_2，再将剩余部分析取起来，记构成新子句C_{12}，称C_{12}为C_1，C_2的归结式或消解式，C_1，C_2称为C_{12}的亲本子句

如 $C_1 = \neg P \lor Q \lor R \quad C_2 = \neg Q \lor S$

$C_{12} = C_1 \land C_2 = \neg P \lor R \lor S$

定理：归结式是其亲本子句的逻辑结论
若两个互否的子句进行归结，结果为空子句

推论：设C_1，C_2是子句集S的两个子句，C_{12}是其归结式，则
(1) 若用C_{12}代替C_1，C_2得新子句集S_1，若S_1不可满足，可推出S不可满足

(2) 若把 C_{12} 加入 S 中得 S_2，则 S_2 与 S 的不可满足性相同.

消解反演：给出公式集 F 与目标公式 L，通过反证或反演来证明 L
过程如下：

(1) 否定 L 得 $\sim L$

(2) 把 $\sim L$ 添加到 F 中去得 $\{F, \sim L\}$

(3) 将新产生的集合 $\{\sim L, F\}$ 化为子句集 S

(4) 用消解原理对 S 中的子句进行归结，把每次归结结果都并入 S 中，若出现空子句则停止，说明 L 为真

替换与合一

由于谓词逻辑的子句含个体变元，不能简单根据谓词符号和否定符号是否互补，因此需要对个体变元作适当替换

替换：$\frac{t_i}{x_i}$ 表示用 t_i 替换 x_i。t_i 是项，称为替换的分子，x_i 是个体变元，称为替换的分母

一个替换是形如 $\{\frac{t_1}{x_1}, \frac{t_2}{x_2}, \cdots, \frac{t_n}{x_n}\}$ 的有限集合. 要求：

1、t_i 不同于 x_i，即不能自己替换自己

2、x_i 不能循环地出现在 t_j $(i, j = 1, 2, \cdots n)$ 中，即不能出现循环替换. 如 $\{\frac{g(y)}{x}, \frac{f(x)}{y}\}$

没有元素的替换称为空替换，记作 ε，表示不作替换

实例：设 $\theta = \{\frac{t_1}{x_1}, \cdots, \frac{t_n}{x_n}\}$，$E$ 是一个表达式，对 E 施行替换 θ
即把 E 中出现的个体变元 x_j $(1 \le j \le n)$ 都用 t_j 替换，记为 $E\theta$.
所得结果称为 E 在 θ 下的实例

替换的复合：设 $\theta = \{\frac{t_1}{x_1}, \cdots, \frac{t_n}{x_n}\}$，$\lambda = \{\frac{u_1}{y_1}, \cdots, \frac{u_m}{y_m}\}$. 则将集合 $\{\frac{t_1\lambda}{x_1}, \cdots, \frac{t_n\lambda}{x_n}, \frac{u_1}{y_1}, \cdots, \frac{u_m}{y_m}\}$ 中符合以下条件的元素

删除：

(1) 当 $t_i\lambda = x_i$ 时删除 $\frac{\lambda t_i}{x_i}$

(2) 当 $y_i \in \{x_1, \dots, x_n\}$ 时删除 $\frac{u_i}{y_i}$

得到的替换称为θ与λ的复合或乘积，记为 $\theta \cdot \lambda$

例，$\theta = \{\frac{f(y)}{x}, \frac{z}{y}\}$ $\lambda = \{\frac{a}{x}, \frac{b}{y}, \frac{y}{z}\}$

$\theta \cdot \lambda = \{\frac{\lambda f(y)}{x}, \frac{\lambda z}{y}, \frac{a}{x}, \frac{b}{y}, \frac{y}{z}\}$

$= \{\frac{f(b)}{x}, \frac{y}{y}, \frac{a}{x}, \frac{b}{y}, \frac{y}{z}\}$ λ的x、y已被θ覆盖

$= \{\frac{f(b)}{x}, \frac{y}{y}, \frac{y}{z}\}$ $\frac{y}{y}$ 无意义

$= \{\frac{f(b)}{x}, \frac{y}{z}\}$

合一：设 $S = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ 是一个原子谓词公式集，若存在一个替换θ使 $F_1\theta = F_2\theta = \dots = F_n\theta$ 则称θ是S的一个合一，称S是可合一的

一个公式集的合一一般不唯一

最一般合一：设σ是原子公式集S的一个合一，如果对S的任何一个合一θ，都存在一个替换λ，使 $\theta = \sigma \cdot \lambda$ 则称σ为S的最一般合一（MGU）

差异集：设S是一个非空的具有相同谓词名的原子公式集，从S中各公式的左边第一个项开始，同时向右比较，直到发现第一个不都相同的项为止，用这些项的差异部分组成一个集合，该集合即原S的一个差异集

例、$S = \{P(x, y, z), P(x, f(a), g(b))\}$

则S有两个差异集 $D_1 = \{y, f(a)\}$ $D_2 = \{z, g(b)\}$

最一般合一算法：求S的MGU

① 置 $k=0$　$S_k=S$　$\sigma_k=\varepsilon$

② 若 S_k 只有一个谓词公式，则停止，σ_k 即最一般合一

③ 求 S_k 的差异集 D_k

④ 若 D_k 中存在元素 x_k 和 t_k，其中 x_k 是变元，t_k 是项且 x_k 不在 t_k 中出现，则置

$$\sigma_{k+1}=\sigma_k\cdot\{\frac{t_k}{x_k}\}$$

$$S_{k+1}=S_k\{\frac{t_k}{x_k}\}$$

$$k++$$

然后转步②

⑤ 算法停止，S的最一般合一不存在

核心思想：每轮循环通过差异集找到S的一个冲突点并用该冲突点构造替换消解冲突，直到无冲突（找到合一）或无法消解冲突为止。

例、求 $F=\{P(a,x,f(g(y))),P(z,h(z,u),f(u))\}$ 的MGU

1、$k=0$，$F_0=F$，$\sigma_0=\varepsilon$

$D_0=\{a,z\}$　$\sigma_1=\sigma_0\cdot\{\frac{a}{z}\}=\{\frac{a}{z}\}$

$F_1=F_0\cdot\{\frac{a}{z}\}=\{P(a,x,f(g(y))),P(a,h(a,u),f(u))\}$

2、$k=1$　$D_1=\{x,h(a,u)\}$

$\sigma_2=\{\frac{a}{z},\frac{h(a,u)}{x}\}$

$F_2=\{P(a,h(a,u),f(g(y))),P(a,h(a,u),f(u))\}$

3、$k=2$　$D_2=\{g(y),u\}$

$\sigma_3=\{\frac{a}{z},\frac{h(a,g(y))}{x},\frac{g(y)}{u}\}$

$F_3 = \{P(a, h(a, g(y)), f(g(y))\}$

$\therefore \sigma_3 = \{\frac{a}{z}, \frac{h(a,g(y))}{x}, \frac{g(y)}{u}\}$ 是F的MGU

合一定理：若S非空、有限，可合一，则合一算法总是在第②步停止，S_k即为MGU

谓词逻辑中的消解原理

二元归结式：也称二元消解式

设C_1、C_2是两个无相同变元的子句，L_1、L_2是C_1、C_2中的两个文字，若L_1、L_2有最一般合一σ，则子句$(C_1\sigma - \{L_1\sigma\}) \cup (C_2\sigma - \{L_2\sigma\})$称作$C_1$、$C_2$的二元归结式，$C_1$、$C_2$称为亲本子句，$L_1$、$L_2$称作消解文字。

例、$C_1 = P(x) \vee Q(x)$　$C_2 = \neg P(a) \vee R(y)$

$\sigma = \{\frac{a}{x}\}$

二元归结式：$Q(a) \vee R(y)$

例、$C_1 = P(x) \vee P(f(a)) \vee Q(x)$　$C_2 = \neg P(y) \vee R(b)$

先对C_1进行合一　$\theta = \{\frac{f(a)}{x}\}$

$C_1\theta = P(f(a)) \vee Q(f(a))$

$\sigma = \{\frac{y}{f(a)}\}$

归结式：$Q(y) \vee R(b)$

因子：若子句C中，两个或以上的文字有一个MGU σ，则$C\sigma$称为C的因子，若$C\sigma$是单元子句，则称$C\sigma$称为C的单因子（即合并后只剩一句话）

如：$C = P(x) \vee P(f(y)) \vee \neg Q(x)$

令 $\sigma = \{f(y)/x\}$

$C\sigma = P(f(y)) \vee \neg Q(f(y))$ 是C的因子

消解式：子句 C_1 和 C_2 的消解式是下列二元消解式之一

(1) C_1 和 C_2 的二元消解式

(2) C_1 和 C_2 的因子 的二元消解式

(3) C_1 的因子 和 C_2 的二元消解式

(4) C_1 的因子 和 C_2 的因子 的二元消解式

定理：谓词逻辑的消解式是它亲本子句逻辑结果

若子句集S不可满足，则必然存在一个由S推出空子句的消解序列.

归结策略

一般性算法

① 将子句集S放入CLAUSES表

② 若空子句NIL在CLAUSES中，则归结成功，结束

③ 若CLAUSES表中存在可归结子句对，则归结，并将归结式并入CLAUSES表，转步②

④ 归结失败，退出

问：如何高效地执行步③

1、删除策略：在归结过程中可随时删除以下子句

① 纯文字语句，即在子句集中无补的文字

如 $\{P(x) \vee Q(x,y) \vee R(x),\ P(a) \vee Q(u,v),\ Q(b,z),\ P(w)\}$

则 $R(x)$ 即为纯文字语句.

② 含永真式的子句

③ 被子句集中别的子句类含的子句

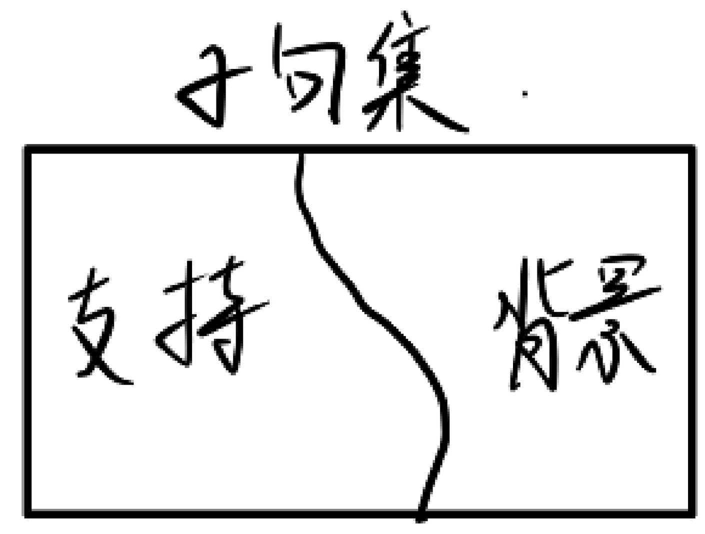
类含：C_1、C_2 为两个子句，若存在替换 θ，使 $C_1\theta \subseteq C_2$
则称 C_1 类含 C_2，或 C_2 被 C_1 类含。此时 C_1 为真
则 C_2 必为真，删除 C_2 不影响 C_1 可满足性

如 $P(x)$ 类含 $P(a) \vee Q(y)$

2、支持集策略

每次归结时，两个亲本子句中至少要有一个是目标公式否定的子句或其后裔。

支持集：子句集的一个子集，由目标公式的否定以及由此派生的子句构成



背景集：初始子句集－初始支持集

即：每次归结必须至少有一个子句来自支持集
将每次生成的子句加入支持集

3、线性归结策略

在归结策略中，除了第一次归结都用给定子句集S中的子句外，其后各次归结则至少要有一个亲本子句是上次归结的结果